Noções Topológicas em $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N})$

Cálculo II

Departamento de Matemática Universidade de Aveiro

2018-2019

Bola em $\mathbb{R}^n$

Sejam $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$
Norma Euclideana: $||X|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
Distância Euclideana: $||X - Y|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$

Bola

Chama-se **bola** (aberta) de centro $A \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ ao conjunto

$$B_r(A) = \{X \in \mathbb{R}^n : ||X - A|| < r\}.$$

- em $\mathbb{R}$: $B_r(a) =]a - r, a + r[$, intervalo
- em $\mathbb{R}^2$: $B_r(A)$ corresponde ao interior do círculo centrado em A e raio r
- em $\mathbb{R}^3$: $B_r(A)$ corresponde ao interior da esfera centrada em A e raio r

Conjunto Limitado

Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **limitado** se existir uma bola que o contenha.

Também podemos dizer que D é limitado se e só se

$$\exists M > 0 : \forall X \in D, \quad ||X|| \leq M.$$

A esfera (sólida)

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

bem como a superfície esférica

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

são limitados. Uma vez que $||(x, y, z)|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 1$, tome $M = 1$.

Ponto interior e interior de um conjunto

Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ e $X \in \mathbb{R}^n$.

Ponto interior

Um ponto $X \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **ponto interior de** D se existir alguma bola de centro X contida em D.

Interior de um conjunto

A totalidade dos pontos interiores de D forma um conjunto que se designa por **interior de** D e denota-se por $intD$:

$$X \in intD \Leftrightarrow \exists r > 0 : B_r(X) \subseteq D.$$

O interior da esfera (sólida) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ é $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$
O interior da superfície esférica $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é o conjunto vazio.

Ponto exterior e exterior de um conjunto

Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ e $X \in \mathbb{R}^n$.

Ponto exterior

Um ponto $X \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **ponto exterior a** D se for ponto interior do complementar de D, D^c.

Exterior de um conjunto

A totalidade dos pontos exteriores de D forma um conjunto que se designa por **exterior de** D e denota-se por $extD$:

$$X \in extD \Leftrightarrow \exists r > 0 : B_r(X) \subseteq D^c.$$

O exterior da esfera (sólida) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ é $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$.
O exterior da superfície esférica $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é o conjunto $\mathbb{R}^3 \backslash \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Ponto fronteiro e fronteira de um conjunto

Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ e $X \in \mathbb{R}^n$.

Ponto fronteiro

Um ponto $X \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **ponto fronteiro de** D se não for interior nem exterior.

Fronteira de um conjunto

A totalidade dos pontos fronteiros de D forma um conjunto que se designa por **fronteira de** D e denota-se por frD:

$$X \in frD \Leftrightarrow \forall r > 0 : B_r(X) \cap D \neq \emptyset \text{ e } B_r(X) \cap D^c \neq \emptyset.$$

A fronteira da esfera (sólida) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ é a superfície esférica $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
A fronteira da superfície esférica $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é ela própria.

Fecho, conjunto fechado e conjunto aberto

Conjunto aberto

Um conjunto D de $\mathbb{R}^n$ diz-se **aberto** quando coincide com o seu interior:

$$D = intD.$$

Fecho de um conjunto

Chama-se **fecho** (ou aderência) de um conjunto D de $\mathbb{R}^n$ ao conjunto

$$\bar{D} = D \cup frD.$$

Conjunto fechado

Um conjunto D de $\mathbb{R}^n$ diz-se **fechado** quando coincide com o seu fecho:

$$D = \bar{D}.$$

A esfera sólida é um conjunto fechado porque contém a correspondente superfície esférica, que é a sua fronteira.

Interior e exterior

Interior

O interior $intD$ de D é o maior conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ que está contido em D.

Exterior

O exterior $extD$ de D é o interior do complementar D^c de D.

Dado $D \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{R}^n = intD \cup frD \cup extD.$$

Exemplo

Determina o domínio de $f(x,y) = \frac{\sqrt{1-x^2}+y}{\sqrt{1-y^2}}$ e indica a fronteira, o interior, o exterior.

Ponto isolado e ponto de acumulação

Ponto isolado

Um ponto $X \in D$ diz-se um **ponto isolado** se existir alguma bola de centro X que só tenha de comum com D o ponto X.

Ponto de acumulação

Um ponto $X \in \mathbb{R}^n$ diz-se um **ponto de acumulação** de D se toda a bola centrada em X contém pelo menos um ponto de D distinto do ponto X.

Conjunto derivado

O conjunto de todos os pontos de acumulação de D designa-se por **conjunto derivado** de D e denota-se por D':

$$X \in D' \Leftrightarrow \forall r > 0, B_r(X) \cap D \backslash \{X\} \neq \emptyset.$$

Exercícios

Para os seguintes conjuntos faz um estudo topológico.

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x + y} < 3\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(xy) \leq 0\}$
4. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z < 1\}$
5. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y = x\}$